CLASSIFICAZIONE MATRICI HESSIANE SIMMETRICHE

- SE $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ È $C^2(D)$

ALLORA TUTTE LE DERIVATE MISTE COINCIDONO SU D

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \qquad H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

SONO SIMMETRICHE

- CLASSIFICAZIONE MAT. SIMMETRICHE $\Longleftrightarrow$ FORME QUADRATICHE

COSA È UNA FORMA QUADRATICA: POLINOMIO OMOGENEO $\to$ SOLO TERMINI DI $2°$ GRADO
$\to$ DI SECONDO GRADO

$n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \qquad q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$$

POSSO:

$A \to q_A$ O $q \to A_q$

ESEMPIO

$$q(h,k) = 2h^2 + hk - k^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

- DI CHE SEGNO È UNA FORMA QUADRATICA?

$q(0,0) = 0 \qquad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\to$ SUL DOMINIO D? CLASSIFICAZIONE VALIDA $\forall n \geq 2$ IN $\mathbb{R}^n$

1) A DEFINITA POSITIVA SE $q_A(h,k) > 0 \quad \forall (h,k) \in D$

2) A DEFINITA NEGATIVA SE $q_A(h,k) < 0 \quad \forall (h,k) \in D$

3) SEMI-DEFINITA POSITIVA SE $q_A(h,k) \geq 0 \quad \forall (h,k) \in D$
$\exists (h,k) : q_A(\bar{h},\bar{k}) = 0$

4) SEMI - DEF. NEGATIVA SE $q_A(h,k) \leq 0 \quad \forall (h,k) \in D$

$\exists (\bar{h},\bar{k}) : q_A(\bar{h},\bar{k}) = 0$

5) INDEFINITA SE NON RIENTRA IN ALCUNO DEI CASI PRECEDENTI

$$\exists (h_1,k_1),(h_2,k_2) \in D : q_A(h_1,k_1) > 0 \quad q_A(h_2,k_2) < 0$$

ESEMPIO 1

$q(h,k) = h^2 + k^2$ SEMPRE >0 ALLORA 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO 2

$q(h,k) = -h^2 - k^2 < 0$ 2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO 3 $a=2 \quad b=8 \quad c=8$

$q(h,k) = 2h^2 + 8hk + 8k^2$

$2(h^2 + 4hk + 4k^2)$

$\downarrow$

$2(h+2k)^2 \geq 0$ ALLORA 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = A$$

$a \neq 0$

$$= a\left(h + \frac{b}{a}k\right) + \frac{ac-b^2}{a}k^2$$

$\to$ DET (A)

- $a>0 \ \wedge \ |A|>0 \to$ 1
- $a<0 \ \wedge \ |A|>0 \to$ 2

$|A|<0 \to$ INDEFINITO 5

ESEMPIO

$a > 0 \qquad q_A(1,0) = a > 0$

$a < 0 \qquad q_A\left(-\frac{b}{a}, 1\right) = \frac{ac - b^2}{a} < 0$ PER IPOTESI $\det(A) < 0$

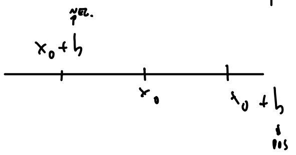
- $|A| = 0$, ALLORA SEMIDEFINITA (POS / NEG) $\longrightarrow$ ③ ④

FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI PEANO

- $n = 1$

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in D$

$f \in C^2(D)$: $\exists f'$, $\exists f''$ CONTINUE IN D



$h \to 0^+$

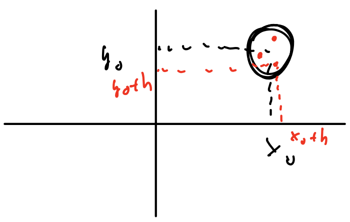
$h \to 0^-$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} f''(x_0) h^2 + \overbrace{\varepsilon(h)}^{\text{RESTO DI PEANO}}$$

$$\frac{\varepsilon(h)}{h^2} \xrightarrow{h \to 0} 0$$

↳ SIMILE A DERIVABILITÀ LEZIONE PRECEDENTE

- $n = 2$



$(x, y) = (x_0 + h, y_0 + k) \qquad h, k \to 0$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \underbrace{f'_x(x_0, y_0) h + f'_y(x_0, y_0) k}_{\text{PIANO TANGENTE}} + f''_{xx}(x_0, y_0) + 2 \overbrace{f''_{xy}}^{f''_{yx} \; \parallel}(x_0, y_0) hk +$$

$$+ f''_{yy}(x_0, y_0) k^2 + \varepsilon(h, k)$$

CON RESTO PEANO: $\dfrac{\varepsilon(h,k)}{h^2 + k^2} \xrightarrow{h,k \to 0} 0$

$$q_{H(x_0,y_0)}(h,k)$$

$$H(h,k) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

ALLORA LA FORMULA È

$$f(x_0+h, y_0+k) = \text{PIANO TANGENTE} + q_{H(x_0,y_0)} + \varepsilon(h,k)$$

- RICERCA DEGLI ESTREMI DI UNA FUNZIONE A PIÙ VARIABILI

ESTREMO: PUNTO NEL DOMINIO DI f DI MINIMO O MASSIMO PER f

$f: \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad n \geq 2$

$\bar{x}_0 \in$ ACCUMULAZIONE (D)

$\forall U_\delta \in \mathcal{U}(\bar{x}_0) \qquad U_\delta \cap D \setminus \{\bar{x}_0\} \neq \emptyset$

PER OGNI INTORNO U_δ DI x_0

- DEF. MAX MINIMO: $\bar{x}_0 \in D \cap ACC(D)$ È UN PUNTO ($\in D$) DI MIN. ASS. DI f SE:

$$f(\bar{x}) \overset{\leq}{\geq} \underbrace{f(\bar{x}_0)} \qquad \forall \bar{x} \in D$$

VALORE (O QUOTA) DELL'ESTREMO $\to$ STA NEL CODOMINIO

x_0 È P.TO DI MIN. REL/LOCALE SE $f(\bar{x}) \overset{\leq}{\geq} f(\bar{x}_0)$ E SE $\exists U_\delta \in \mathcal{U}(\bar{x}_0): \forall \bar{x} \in U_\delta \cap D$

- $\bar{x}_0$ È P.TO DI MIN. $\boxed{\text{LIBERO}}$

↳ SE $\in$ ALL'INTERNO DI D

↳ $\bar{x}_0$ È UN PUNTO INTERNO A D

- $\bar{x}_0$ È P.TO DI MINIMO $\boxed{\text{VINCOLATO}}$

↳ SE $\bar{x}_0$ È P.TO DI FRONTIERA DI D

ESEMPIO

1) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2 \qquad D = \mathbb{R}^2$ APERTO

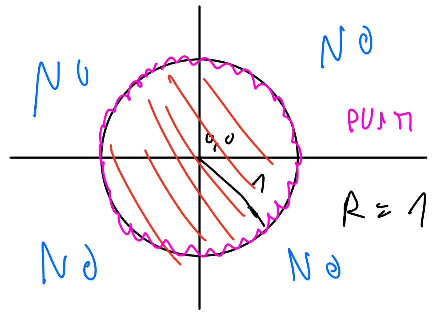
L'ORIGINE È UN PUNTO DI MASSIMO GLOBALE

APPLICO DEF.: $f(x,y) \leq f(0,0) \qquad \forall (x,y) \in D$

$$1 - x^2 - y^2 \leq 1 \quad \to \quad x^2 + y^2 \geq 0 \qquad \forall (x,y) \in D$$

2) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $\qquad D: \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \}$

$x^2 + y^2 \leq 1$



PUNTI DI MINIMO

DOMINIO CHIUSO

SE ORIGINE PUNTO MASSIMO, ALLORA $f(x,y) \leq f(0,0) \quad \forall (x,y) \in D$

$\sqrt{1-x^2-y^2} \leq 1 \rightarrow 1 - x^2 - y^2 \leq 1$

$\hookrightarrow x^2 + y^2 \geq 0$ VERO

ALLORA $(0,0)$ È IL PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO $\rightarrow$ LIBERO PERCHÉ $(0,0)$ P.TO INTERNO

PUNTI MINIMO?

$f(x,y) \geq f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \forall (x,y) \in D$

$\sqrt{1-x^2-y^2} \geq \sqrt{1 - 1/2 - 1/2} = 0$

$\sqrt{1-x^2-y^2} \geq 0 \rightarrow$ SEMPRE, QUINDI I PUNTI DI MINIMO SONO TUTTI SULLA CIRCONFERENZA VINCOLATO (PERCHÉ SONO IN FRONTIERA)

TEOREMA DI WEISTRASS

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

IPOTESI

Hp) D CHIUSO E LIMITATO

f CONTINUA

TH) f AMMETTE ALMENO UN PUNTO $\bar{x}_{MIN}$ DI MIN ASSOLUTO E ALMENO $\bar{x}_{MAX}$ DI MAX ASSOLUTO